HOJA 7: APLICACIONES ORTOGONALES

1) Sea $f: V \to V$ una aplicación lineal definida en un espacio euclídeo cuyas ecuaciones respecto de una base ortonormal B son

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 - 2x_3); \quad y_2 = \frac{1}{3}(-2x_1 + x_2 - 2x_3); \quad y_3 = \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 + x_3)$$

   a) Halle la matriz A asociada a f respecto de B.
   b) Demuestre que f es una aplicación ortogonal.
   c) Halle el subespacio S de vectores invariantes por f. ¿Se cumple que $f(S^\perp) = S^\perp$?
   d) Diga cuál es el significado geométrico de la aplicación f.

2) Halle la matriz, respecto de la base canónica en R^2, de las siguientes aplicaciones:

   a) Simetría respecto de la recta $x - y = 0$.
   b) Simetría respecto de la recta $x + 2y = 0$.
   c) Giro de centro $(0,0)$ y amplitud $\frac{\pi}{6}$.

3) Halle la matriz, respecto de la base canónica de R^3, de las siguientes aplicaciones:

   a) Proyección ortogonal sobre la recta $r: L(\{(2,-1,0)\})$.
   b) Simetría respecto del plano Π: $\{(x,y,z);\ 2x - y = 0)\}$.
   c) Giro de eje $L(\{(0,1,1)\})$ y amplitud $\frac{\pi}{2}$.
   d) Composición de las aplicaciones b) y c).

4) En el espacio euclídeo R^4 se considera el subespacio $F = L(\{(-1,0,0,1),(1,-1,0,0)\})$. Halle el complemento ortogonal de F y obtenga la matriz de la proyección ortogonal de R^4 sobre F en la base canónica. ¿Se trata de una gransformación ortogonal?

5) En R^2 se consideran las aplicaciones lineales cuyas respectivas matrices (en la base canónica) son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Estudie si son ortogonales y, en caso afirmativo, clasifíquelas.

6) Estudie qué tipo de aplicaciones ortogonales de R^3 (respecto de la base canónica) definen las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Sea $f: R^3 \to R^3$ una aplicación lineal tal que:
   i) La matriz asociada a f con respecto a la base canónica, $A = M(f, B_c)$, es simétrica.

ii) $L\left(\{(2,-2,-1)\}\right)$ es un subespacio propio de f.
iii) $f(1,0,0)=(3,2,2), \quad f(0,1,0)=(2,2,0)$.

a) Responda razonadamente si f es una aplicación ortogonal.
b) Halle los autovalores y los subespacios propios de f.
c) Encuentre una forma diagonal de f y obtenga, si es posible, una base ortonormal en la que f sea diagonal.